Leçon 243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

1. Définitions et premières propriétés. —

1. Séries entières et rayon de convergence. —

- Def : On appelle série entière une série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.
- Def : Rayon de convergence : $R = \sup(r > 0 \text{ tq } \sum_n |a_n| r^n)$ converge.
- Def : Convergence normale d'une série : La série $\sum_n b_n$ CV normalement ssi $\sum_n |b_n|$ CV.
- Lemme d'Abel : Pour tout $r < R$, $\sum_n a_n r^n$ converge normalement. Pour tout $r > R$, $\sum_n a_n r^n$ diverge grossièrement.
- Ex : Pour $a_n = 1$, $R = 1$ et on ne converge pas en $r = 1$. Pour $a_n = \frac{1}{n^2}$, $R = 1$ et on converge en $R = 1$.
  Le comportement sur le rayon de convergence peut varier, là où le comportement plus près/plus loin est plus clair.
  Sur $]-R, R[$, la convergence normale de la série implique la convergence uniforme en x sur tout compact, donc la continuité de la somme.

2. Méthodes de calcul de R. —

- Règle de d'Alembert : Si $a_n \neq 0$ àpcr, et si $\lim(|\frac{a_n}{a_{n+1}}|) = r_0$ existe dans $[0, +\infty]$, alors $R = r_0$.
- Règle de Cauchy : Si $\lim(|a_n|^{\frac{1}{n}}) = \lambda \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$.
- Ex: $\sum_n n^a z^n$ a un rayon de convergence de 1. $\sum_n n! z^n$ a un rayon de convergence nul.
- Ex : $exp(x) = \sum_n \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence $R = +\infty$.
- Formule de Hadamard : $R^{-1} = \limsup(|a_n|^{\frac{1}{n}})$.
- Ex: $\sum_n n^a x^n$ a un rayon de convergence de 1.
- Ainsi, $\sum_n z^{2n}$ et $\sum_n z^{2^n}$ sont de rayon de CV 1.

3. Opérations sur les séries entières, applications à la définition de séries entières classiques. —

- La somme, la multiplication par un scalaire, et le produit de Cauchy de séries entières sont des séries entières. Le rayon de CV de la somme et du produit est $\geq inf(R_0, R_1)$.
  On a $\sum_n (\frac{z}{R})^n + 0$ de rayon R, et $\sum_n (\frac{z}{R})^n .1$ de rayon R, donc l'inégalité est maximale.
- Les séries entières sont assez similaires avec les séries formelles, à la différence près que l'on ne regarde les séries entières que pour la convergence/divergence de leurs évaluations en z.
- Une série entière a une série inverse si $a_0 \neq 0$, et cet inverse est de rayon de cv $\frac{1}{R}$.
- Si $b_0 = 0$, on peut facilement écrire la composition d'une série entière par une autre comme une série entière.
- Def : Série dérivée : $\sum_n (n+1).a_{n+1} x^n$. Son rayon de cv est R.
- Ex : La série dérivée de $exp(z)$ est ainsi $exp(z)$. On peut de plus définir cos, sin,ch, sh à partir de exp comme somme de séries entières de rayon de cv $+\infty$.

2. Régularité de la somme. —

1. Continuité, dérivabilité sur $\mathbb{R}$. —

- Pro : Une série entière est continue sur son disque de convergence. Elle est donc uniformément continue sur tout compact de son disque de convergence.
- Thé : Comme la série dérivée est normalement convergente sur $]-R, R[$, le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique et on montre alors que la somme d'une série entière est C^1, puis C^∞ sur $]-R, R[$.
- Ex : On a donc $exp'(x) = exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, et $cos' = -sin$, $sin' = cos$ sur $\mathbb{R}$, et ces fonctions sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Pour $\sum_n x^n = \frac{1}{1-x}$, on trouve alors $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_n (n+1) x^n$ sur $]-1, 1[$.

2. Liens avec le développement de Taylor.—

- Pro : Ainsi, pour S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$, $\frac{S^{(n)}(0)}{n!} = a_n$. On peut ainsi identifier le développement de Taylor de la somme d'une série entière via les coefficients de la série.
- Def : Une fonction est DSE en 0 ssi il existe $\alpha > 0$ tel que f coïncide avec la somme d'une série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.
- Rem : Une fonction DSE en 0 est de classe C^∞ sur un voisinage de 0, et est égale à la somme de sa série de Taylor sur $]-\alpha, \alpha[$.
  La série entière $\sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est alors de rayon de cv $R \geq \alpha$.
- Pour $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$, 0 sinon, $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \geq 0$ donc la série entière de f en 0 est de rayon de CV non-nul, mais elle n'est pas somme de sa série de Taylor localement en 0.
  A l'inverse, si le rayon de CV de $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est nul, alors f n'est pas somme de sa série de Taylor localement x.
- Ex : DSE en 0 de sin, cos, sh, $(1+x)^a$.
- Théorème de Bernstein : Si $f^{(2k)} \geq 0$ sur $]-a, a[$, alors f est somme de sa série de Taylor sur $]-a, a[$.

3. Primitive d'une série entière. —

- On définit $\sum_n \frac{a_{n+1}}{n+1} z^n$ la primitive d'une série entière. Elle est aussi de rayon de convergence R. Sa série dérivée est $\sum_n a_n z^n$.
- App : Cela permet de calculer facilement le développement en série entière de $ln(1+x)$, $arctan(x)$,$arccos(x)$.

4. Liens avec les fonctions holomorphes. —

- Def : Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables. f est holomorphe sur U ssi elle est $\mathbb{C}-dérivable$ en tout point de U. On note $Hol(U)$ l'ensemble des fonctions holom sur U.

- Def : $f : U \to \mathbb{C}$ est DSE en x ssi elle est égale à la somme d'une série entière sur un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{C}$. Les voisinages sont alors des petites boules en dimension 2. On redéfinit de même l'analyticité sur U.
- Une série entière est holomorphe et analytique sur son disque de convergence.
- Réciproquement, une fonction holom sur U est analytique sur U, ce qui permet de considérer son DSE en tout point $x \in U$.
- Principe des zéros isolés : Une fonction holomorphe non-nulle sur U ouvert connexe a son ensemble de zéros discret dans U.
  Ainsi, deux fonctions holomorphes sur U ouvert connexe sont égales ssi elles le sont sur un sous-ensemble possédant un point d'accumulation dans U.
- Formule de Cauchy : Pour f holom sur U, $x \in U$ et r>0 tq $B(x,r) \in U$, alors $r^n.f^{(n)}(x)/n! = \int_0^{2\pi} f(x+re^{it})dt$.
- App : Théorème de Liouville : Toute série entière de rayon $+\infty$ dont la somme est majorée en module par une fonction polynômiale est en fait une fonction polynômiale.
- Egalité de Parseval : $\sum_n |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+re^{it}|^2 dt$

3. Problèmes de prolongement analytique au bord. —

- Il existe des séries entières qui CV unif sur $\overline{\mathbb{D}}$ mais qui ne sont pas de rayon de cv $R = 1$.
- Prolongement analytique : Pour $f \in Hol(U)$ et $g \in Hol(V)$ avec $U \subset V$, si $f \equiv g$ sur U alors g est un prolongement analytique de f sur V.
- Ex : $\sum_n x^n$ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C} - \{1\}$ par $\frac{1}{1-z}$
- Un point $z_0 \in \partial\Omega$ est dit régulier pour f s'il existe un ouvert V contenant $\Omega \cap \{z_0\}$ et g analytique sur V telle que $f \equiv g$ sur Ω.
  Le point z_0 est dit singulier pour f sinon.
- La somme d'une série entière de rayon R possède au moins un point singulier sur $\partial B(0,R)$.
- Pour $z_1, \dots, z_n \in \partial\mathbb{D}(0,1)$, $f(z) = \Pi_{i=1}^n \frac{1}{z-z_i}$ et $a_n = f^{(n)}(0)$, la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ a $z_1, \dots, z_n$ comme points singuliers.
- **Dev** : Théorème des Lacunes de Hadamard : Soit $(\lambda_n)_n$ une suite croissante d'entiers telle qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, pour tous $n \geq 0$.
  Soit $(a_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1.
  Alors, la somme de cette série entière n'a aucun point régulier sur $\partial\mathbb{D}(0,1)$.
- Ex : La somme de la série $\sum_{n\geq 0} n.z^{2^n}$ est analytique sur $\mathbb{D}(0,1)$, diverge en tout point de $\partial\mathbb{D}(0,1)$, et n'admet aucun prolongement analytique. La somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}.z^{2^n}$ est analytique sur $\mathbb{D}(0,1)$, se prolonge continument sur $\partial\mathbb{D}(0,1)$, mais n'admet aucun prolongement analytique.
- Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible.
- Pour tous $\alpha \in [-\pi, 0[$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto ln(x)$ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C} - \{z \text{ tq } z = r.e^{i\alpha},\ r > 0\}$ par $ln_\alpha(z) = ln(|z|) + i\theta$ pour $z = |z|.e^{i\theta}$, $\theta \in]\alpha, \alpha+2\pi[$.
  Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a ainsi un α tel que $ln_\alpha(z)$ soit bien défini et que ln_α prolonge analytiquement ln. Cependant, aucune de ces fonctions ne peut se prolonger à $\mathbb{C}$ tout entier car $\lim_{\theta\to\alpha^+}(ln_\alpha(r.e^{i\theta})) \neq \lim_{\theta\to\alpha+2\pi^-}(ln_\alpha(r.e^{i\theta}))$, $\forall r > 0$.

4. Quelques applications des séries entières. —

1. Calcul de séries numériques, dénombrement. —

- On peut voir une série numérique comme une série entière évaluée en un point, ce qui simplifie parfois le calcul de sa somme.
- Ex : $b = \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On pose $B = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{1}{z}\sum_n \frac{z^n}{n}$.
  On reconnaît la série primitive de $\sum_n z_n$, de somme égale à $\frac{1}{1-z}$ dans $\mathbb{D}$. Donc $B(z) = \frac{1}{z}(-ln(1-z))$ sur $\mathbb{D}$, d'où $b = B(-1) = ln(2)$ par prolongement analytique.
- Nombres de Bell. Pour B_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$, on a $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$. En utilisant la série génératrice $\sum_n \frac{B_n}{n!}x^n$, on montre alors que $B_n = \frac{1}{e}\sum_k \frac{k^n}{k!}$.
- Partitions d'un entier en parts fixées. On se fixe $k > 0$, $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ et pour $n > 0$ on regarde u_n le nombre de $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tq $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$.
  On a alors $u_n \ \frac{1}{a_1 \dots a_n}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.

2. Caracrérisation de propriétés d'intégrabilité de fonctions holomorphes. —

- **Dev** : L'espace de Bergman $B(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D}) \text{ tq} f \in L^2(\mathbb{D})\}$ est un espace de Hilbert pour $\|.\|_2$ et est exactement l'ensemble des sommes de séries entières $\sum_n a_n x^n$ avec $(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}})_n \in l^2$, restreintes à $\mathbb{D}$. On a une condition d'intégrabilité qui ne porte que sur les coeffs du DSE en 0.

3. Développement en série entière via la résolution d'équas diffs linéaires. —

- Pour des EDL dont les coefficients sont des fractions rationnelles, on peut chercher des solutions DSE sur chaque intervalle entre les pôles des dénominateurs, afin d'obtenir des relations de récurrence sur les coefficients du DSE.
- Ex du Gourdon pour $\frac{arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(x-1)}}$ qui est analytique sur $]-1,1[$ et sol de $(1-x^2)f" - xf' = 2$.

Références

Gourdon : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples.
Hauchecorne : Contre-Exemple de séries entières ayant des problèmes.
Zuily, Queffélec : Lacunes de Hadamard.(Dev) Série entière qui a un rayon de CV unif strictement plus grand.
Bayen, Margaria : Espace de Bergman.(Dev)

June 11, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes